QCM

1) a) S a pour centre I(0,5 :0,5 :0,5) et pour rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$

   b) $S \cap P = \emptyset$

2) a) (BCH) : x + z – 1 = 0

   b)La droite (HC)

   c) La droite passant par le centre du carré ABCD et parallèle à (AE)

VRAI-FAUX

1) Vrai en effet $\vec{N}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{N'}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ sont des vecteurs normaux respectives des deux plans et

$$\vec{N}.\overrightarrow{N'} = 1 - 2 + 1 = 0$$

2) Vrai en effet $\vec{U}$ est un vecteur normal à P et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est aussi un vecteur normal à P ;par suite $\vec{U}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

3) Faux

   S de centre le point O et de rayon R=1 et P : $x-\frac{1}{2}=0$

   $D(O,P)=\frac{\left|0-\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{1}} = \frac{1}{2} < R$ d'où $S \cap P$ est un cercle de rayon :

$$r = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

4) Vrai S est de centre I(1,1,1) et de rayon R=1.

   P_1 :x=0 ; P_2 : y=0 ; P_3 :z=0

   $D(I,P_1) = D(I,P_2) = D(I,P_3) = 1 = R$

   D'où S est tangente à chacun des plans P_1 ;P_2 et P_3

EX 1 :

a/ A(1,-2,3) ; B(-1,0 ,1) ; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$

D'où (AB) : $\begin{cases} x = 1 - 2\alpha \\ y = -2 + 2\alpha \\ z = 3 - 2\alpha \end{cases}$; $\alpha \in IR$

b/ $A(2,\frac{7}{2},0)$; B(2,-2 ,1) ; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-5{,}5\\1\end{pmatrix}$

D'où (AB) : $\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 - 5{,}5\alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases}$; $\alpha \in IR$

c/ A(0,0,1) ; B(-1,-1,-1) ; $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

D'où (AB) : $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$; $t \in IR$

EX 2 :

$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs respectifs de D et D' et sont colinéaires (il est clair que $\overrightarrow{u'} = -2\vec{u}$) ; par suite les droites D et D' sont parallèles.

EX 3 :

a/ $\Delta:\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -5 - 3\alpha \\ z = 8 + t \end{cases} \quad t \in IR$

P :x+y+z-5=0

$\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$:vecteur directeur de Δ

$\vec{N}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:vecteur normal à P

$\vec{u}.\vec{N} = 2 - 3 + 1 = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{N}$

Par suite Δ et P sont parallèles

A(4,-5,8) un point de Δ et

n'appartient pas à P

Conclusion : Δ et P sont strictement parallèles.

b/ $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$:vecteur directeur de Δ

$\vec{N}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$:vecteur normal à P

$\vec{u}.\vec{N} = 10 + 0 + 8 = 18 \neq 0$

$\Rightarrow \vec{u}$ et $\vec{N}$ ne sont pas orthogonaux

Par suite Δ et P sont sécantes.

EX 4 :

a/ P :2x+ 3y-5z-20=0

$(O,\vec{\imath})$ a pour représentation

paramétrique : $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ tϵIR

M(x,y,z)ϵP∩$(O,\vec{\imath})$ ssi

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \\ 2x + 3y - 5z - 20 = 0 \end{cases} \quad \text{ssi}$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \\ 2t + 3\times 0 - 5\times 0 - 20 = 0 \end{cases} \quad \text{ssi}$$

$x = 10 \; ; y = 0 \; ; \; z = 0$

Conclusion : P∩$(O,\vec{\imath})$={$A(10,0,0)$}

b/ $(O,\vec{\jmath})$ a pour représentation

paramétrique : $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ tϵIR

M(x,y,z)ϵP∩$(O,\vec{\imath})$ ssi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \\ 2x + 3y - 5z - 20 = 0 \end{cases} \quad \text{ssi}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \\ 2\times 0 + 3t - 5\times 0 - 20 = 0 \end{cases} \quad \text{ssi}$$

x=0 ; y=$\frac{20}{3}$; z=0

Conclusion : P∩$(O,\vec{\jmath})$=$\left\{B\left(0,\frac{20}{3},0\right)\right\}$

c/ $\vec{\jmath}\wedge\vec{\imath}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (O\,;\vec{\jmath}\wedge\vec{\imath})$

a pour représentation

paramétrique : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases}$ tϵIR

M(x,y,z)ϵP∩$(O,\vec{\jmath}\wedge\vec{\imath})$ ssi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -t \\ 2x + 3y - 5z - 20 = 0 \end{cases} \quad \text{ssi}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -t \\ 2\times 0 + 3\times 0 + 5t - 20 = 0 \end{cases}$$ ssi

x=0 ; y=0 ; z=4

Conclusion : P∩(O, $\vec{j}\wedge\vec{i}$)={$C(0,0,-4)$}

EX 5 :

1) B(2,0,0) ;D(0,1,0) et H(0,1,1)

⇒I(1 ;0,5 ;0) et $\overrightarrow{HI}\begin{pmatrix}1\\-0,5\\-1\end{pmatrix}$

Par suite (HI) :$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - \frac{1}{2}t \\ z = 1 - t \end{cases}$; tϵIR

2) D(0,1,0) ,E(0,0,1) et G(2,1,1)

$\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$⇒

$\overrightarrow{DE}\wedge\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (DEG).

$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in(DEG) ssi \overrightarrow{DM}.(\overrightarrow{DE}\wedge\overrightarrow{DG})=0$

Ssi –x+2y+2z-2=0

Conclusion (DEG) : –x+2y+2z-2=0

3) Les points H,D,E et G ne sont pas coplanaires ⇒H∉(DEG)

⇒ (HI)∉ (DEG) (1)

Soit J le milieu de [HI]⇒J$(\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{1}{2})$

$\frac{1}{2}-2\times\frac{3}{4}-2\times\frac{1}{2}+2=0$⇒Jϵ(DEG) (2)

1) et (2) ⇒(HI)∩(DEG)={J}

Ex 6 : A(-1,-2,-3)

1) a/ $(\vec{i}-\vec{j})\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$; $\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$(\vec{i}-\vec{j})\wedge\vec{k}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P.

$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in P\ ssi \overrightarrow{AM}.((\vec{i}-\vec{j})\wedge\vec{k})=0$

Ssi –(x+1)-(y+2)+0=0

ssi -x-y-3=0

Conclusion P : x + y +3 = 0

b/ $(\vec{i}+\vec{j})\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$; $\vec{i}+\vec{k}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$(\vec{i}+\vec{j})\wedge(\vec{i}+\vec{k})\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan Q.

$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in Q\ ssi \overrightarrow{AM}.[(\vec{i}+\vec{j})\wedge(\vec{i}+\vec{k})]=0$

Ssi x – y-z -4 = 0

Conclusion Q : x – y-z -4 = 0

c/ $(\vec{i}\wedge\vec{j})\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; $\vec{j}\wedge\vec{k}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$(\vec{i}\wedge\vec{j})\wedge(\vec{j}\wedge\vec{k})\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan R.

$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in P$ ssi $\overrightarrow{AM}.(\vec{i}\wedge\vec{j})\wedge(\vec{j}\wedge\vec{k})=0$

Ssi y+2 = 0

Conclusion R : y + 2 = 0

2) O(0,0,0) P : x + y +3 = 0

d(O ;P)=$\frac{|3|}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$

d(O ;Q)=$\frac{|-4|}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$

d(O ;R)=$\frac{|2|}{\sqrt{1}}=2$

Ex 7 :

1) (OIJ) : z=0
(OJK) :x=0
(OIK) :y=0
(IJK) :x+y+z-1=0

2) M($\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}$)
D(M,(OIJ))= D(M,(OJK))
= D(M,(OIK))=$\frac{1}{3}$
D(M,(IJK))=0

3) M$\notin$(OIJ)$\Rightarrow$O,I,J et M ne sont pas coplanaires.

$\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$;$\overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OI}\wedge\overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{OI}\wedge\overrightarrow{OJ}\right).\overrightarrow{OM}\right|=\frac{1}{6}.\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$

EX 8 :

a/ $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$un vecteur normal à P $\Rightarrow$
P :2x-y+3z+d=0

AϵP$\Rightarrow$2-0+3+d=0$\Rightarrow$d=-5

$\Rightarrow$ P : 2x-y+3z-5=0

b/ M$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in P$ SSi $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

1.(x-1)-(y-2)+0=0

ssi x-y+1=0

Cclision P :x-y+1 =0

c/ M$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in P$ SSi $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

ssi 2x-3y-4z-4=0

Cclision P : 2x-3y-4z-4=0

Ex 9 :

a/ D$\perp$P$\Rightarrow\vec{N}\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}$ qui est un vecteur normal à P est aussi un vecteur directeur de la droite D. et on a A(0,0,1)ϵD $\Rightarrow$

$$D:\begin{cases} x=-3\alpha \\ y=2\alpha \\ z=1 \end{cases} ; \alpha \in IR$$

b/ D⊥P⇒$\vec{N}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ qui est un vecteur normal à P est aussi un vecteur directeur de la droite D. et on a A(1,-3,2)∈D ⇒

$$D:\begin{cases} x=1 \\ y=-3+\alpha \\ z=2 \end{cases} ; \alpha \in IR$$

c/ D⊥P⇒$\vec{N}\begin{pmatrix}0\\1\\-5\end{pmatrix}$ qui est un vecteur normal à P est aussi un vecteur directeur de la droite D. et on a A(1,5,3) ∈D ⇒

$$D:\begin{cases} x=1 \\ y=5+\alpha \\ z=3-5\alpha \end{cases} ; \alpha \in IR$$

Ex 10 :

1) -1+5×1-5=-1≠7 ⇒A∉P

2) a/ $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{N}\begin{pmatrix}-1\\5\\-1\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs normaux à P donc $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{N}$ sont colinéaires et par suite il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AH}=k.\vec{N}$ ce qui donne $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-k\\5k\\-k\end{pmatrix}$

b/ $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}x_0-1\\y_0-1\\z_0-5\end{pmatrix}$ et H∈ P

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x_0-1=-k \\ y_0-1=5k \\ z_0-5=-k \\ -x_0+5y_0-z_0=7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x_0=1-k \\ y_0=1+5k \\ z_0=5-k \\ -x_0+5y_0-z_0=7 \end{cases}$$

⇒k=$\frac{8}{27}$ et par suite

$x_0=\frac{19}{27}; y_0=\frac{67}{27}$ et $z_0=\frac{127}{27}$

Conclusion : H($\frac{19}{27};\frac{67}{27};\frac{127}{27}$)

EX 11 :

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}1 & -1\\2 & 1\end{vmatrix}$=1+2=3≠0 ⇒$\overrightarrow{AB}$et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite A,B et C ne sont pas alignées.

2) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in(ABC) ssi \overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})=0$

Ssi -2x+y+3z-5=0

Conclusion (ABC) : -2x+y+3z-5=0

3) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ est aussi un vecteur normal au plan Q ⇒

Q : -2x+y+3z+d=0

D(0,1,2)∈Q⇒1+6+d=0⇒d=-7

Q : -2x+y+3z-7=0

4) $\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow (OD):\begin{cases}x=0\\y=t\\z=2t\end{cases}$;tϵIR

M(x,y,z)ϵ(OD)∩(ABC)⇔

$$\begin{cases}x=0\\y=t\\z=2t\\-2x+y+3z-5=0\end{cases}$$

$\Rightarrow t=\frac{5}{7} \Rightarrow$ x=0 ;y=$\frac{5}{7}$ et z= $\frac{10}{7}$

Conclusion : L'intersection de la droite (OD) avec le plan (ABC) est le point H(0 ; $\frac{5}{7}$; $\frac{10}{7}$)

EX 12 :

P : 2x-y+2z-5=0

Q :2x+2y-z-4=0

1) $\vec{N}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} et\ \overrightarrow{N'}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ sont des vecteurs normaux respectives de P et Q

et $\vec{N}.\overrightarrow{N'}=4-2-2=$ $0\Rightarrow \vec{N}\perp\overrightarrow{N'}$ et par suite P⊥Q

2) A(1,2-1)

$d(A,P)=\frac{|2-2-2-5|}{\sqrt{9}}=\frac{7}{3}$

$d(A,Q)=\frac{|2+4+1-4|}{\sqrt{9}}=\frac{3}{3}=1$

3) P∩Q=Δ et P⊥Q

$\Rightarrow d^2(A,\Delta)= d^2(A,P)+ d^2(A,Q)$

$\Rightarrow d(A,\Delta)=\frac{\sqrt{58}}{3}$

4) $\Delta:\begin{cases}2x-y+2z-5=0\\2x+2y-z-4=0\end{cases}$

On pose z=t on aura

$$\begin{cases}z=t & (1)\\2x-y=5-2t & (2)\\2x+2y=4+t & (3)\end{cases}$$

(3)-(2)⇒3y=-1+3t⇒y= $-\frac{1}{3}+t$

Et par suite x = $\frac{7}{3}-\frac{1}{2}t$

Donc $\Delta:\begin{cases}x=\frac{7}{3}-\frac{1}{2}t\\y=-\frac{1}{3}+t\\z=t\end{cases}$; tϵIR

5) M($\frac{7}{3}-\frac{1}{2}t$; $-\frac{1}{3}+t$;t)

Soit la fonction f :t→f(t)=AM²

$\Rightarrow f(t)=(\frac{4}{3}-\frac{1}{2}t)^2+(-\frac{7}{3}+t)^2+(1+t)^2$

$\Rightarrow f'(t)=\frac{9}{2}t-4$

t	-∞	8/9	+∞
f'(t)	-	0	+
f(t)	↘	58/9	↗

La distance AM est minimale pour t= 8/9 ⇒ M($\frac{17}{9}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{8}{9}$)

EX 13 : A(0,3,2)

P_m :(1+m)x+y-2mz-4-3m=0

1) a/

$d(A,P_m)=\frac{|3+4m-4-3m|}{\sqrt{(1+m)^2+1+4m^2}}=\frac{|m-1|}{\sqrt{5m^2+2m+2}}$

b/ $d(A,P_m)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\frac{|m-1|}{\sqrt{5m^2+2m+2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow\frac{(m-1)^2}{5m^2+2m+2}=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2.(m-1)^2=5m^2+2m+2$

$\Leftrightarrow 3m^2+6m=0 \Leftrightarrow m=0$ ou $m=-2$

2) D: $\begin{cases} x=1-2t \\ y=3+2t \\ z=-1-t \end{cases}$; $t\in IR$

$(1+m)(1-2t)+(3+2t)-2m(-1-t)-4-3m=$

$1-2t+m-2mt+3+2t+2m+2mt-4-3m=0$

$\Rightarrow D\subset P_m$; pour tout réel m

EX 14 :

1) $\overrightarrow{N_P}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ vecteur normal à P

$\overrightarrow{N_Q}\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}$ vecteur normal à Q

$\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 0\end{vmatrix}=-6\neq 0\Rightarrow\overrightarrow{N_P}$ et $\overrightarrow{N_Q}$ ne sont pas colinéaires $\Rightarrow$P et Q sont secants.

2) Soit E l'ensemble des points équidistant de P et Q

*$M(x,y,z)\in E\Leftrightarrow d(M,P)=d(M,Q)$

$\Leftrightarrow\frac{|x+2y+2z-1|}{\sqrt{9}}=\frac{|3x-4z|}{\sqrt{25}}$

$\Leftrightarrow 25(x+2y+2z-1)^2=9(3x-4z)^2$

$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}5x+10y+10z-5=9x-12z\\ ou\\ 5x+10y+10z-5=12z-9x\end{vmatrix}$

$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}4x-10y-22z+5=0\\ ou\\ 14x+10y-2z-5=0\end{vmatrix}$

$\Leftrightarrow$

M$\in$ plan F: $4x-10y-22z+5=0$

ou

M$\in$ plan H : $14x+10y-2z-5=0$

Donc E=F**U**H

$\overrightarrow{N_F}\begin{pmatrix}4\\-10\\-22\end{pmatrix}$ vecteur normal à F

$\overrightarrow{N_H}\begin{pmatrix}14\\10\\-2\end{pmatrix}$ vecteur normal à H

$\overrightarrow{N_F}.\overrightarrow{N_H}=56-100+44=0\Rightarrow F\perp H$

*Soit $\Delta=P\cap Q$ tout point de Δ est équidistant de P et Q (d=0)$\Rightarrow\Delta\subset E$

CONCLUSION : l'ensemble des points équidistants de P et Q est la réunion de deux plans :

F: $4x-10y-22z+5=0$ et

H : $14x+10y-2z-5=0$

Qui sont perpendiculaires et contenants la droite Δ .

EX 15 : A(1,2,-1) ; B(2,1,1)

1) Q passe par A et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$

$M(x,y,z)\in Q\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=0$

$\Leftrightarrow(x-1)\times 1+(y-2)\times(-1)+(z+1)\times 2=0$

$\Leftrightarrow x-y+2z+3=0$

Cclusion Q : $x-y+2z+3=0$

2) P_m :x+y+m-3=0

a/ $\vec{N}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ vecteur normal à P_m

$\overrightarrow{AB}.\vec{N} = 1-1+0 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \vec{N}$

Par suite (AB) // P_m

b/ Aϵ $P_m \Leftrightarrow$1+2+m-3=0$\Leftrightarrow$m=0

(AB) $\subset$ P_m ssi m=0

c/ Q de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB} \perp \vec{N}$

$\Rightarrow$Q$\perp P_m$ pour tout m ϵ IR

3) ABB'A' carré ssi AA'=AB

Ssi d(A,P_m)=AB

$\Leftrightarrow \frac{|1+2+m-3|}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}$

$\Leftrightarrow |m| = 2\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow$ m= $2\sqrt{3}$ ou m= $-2\sqrt{3}$

Ex 16 :

A(a,0,0) B(0,b,0) C(0,0,c)

1) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-a\\b\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-a\\0\\c\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}bc\\ac\\ab\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC)

(ABC) : (bc).x+(ac).y+(ab).z+d=0

A(a,0,0)$\in$ (ABC) $\Rightarrow$ abc+d=0 $\Rightarrow$ d=-abc

d'où (ABC):(bc).x+(ac).y+(ab).z-abc=0

b) OH=$d_{(O,(ABC))}$

$$OH=\frac{abc}{\sqrt{(bc)^2+(ac)^2+(ab)^2}}$$

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{(bc)^2+(ac)^2+(ab)^2}{a^2b^2c^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$$

2) a) soit A : l'aire du triangle ABC

$$A=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$$

d'où : $A=\frac{1}{2}\sqrt{(bc)^2+(ac)^2+(ab)^2}$

b) $A_1 = aire(OAB) = \frac{ab}{2}$

$A_2 = aire(OAC) = \frac{ac}{2}$

$A_3 = aire(OBC) = \frac{bc}{2}$

$$A^2 = \frac{1}{4}\left[(bc)^2+(ac)^2+(ab)^2\right]$$

$$A^2 = A_1^{\,2} + A_2^{\,2} + A_3^{\,2}$$

Ex 17 :

1) S : $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z=0\Leftrightarrow$

$(x^2-4x)+(y^2+2y)+(z^2-6z)=0\Leftrightarrow$

$(x-2)^2-4+(y+1)^2-1+(z-3)^2-9=0\Leftrightarrow$

$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2= 14$

D'où l'ensemble S est la sphère de centre le point I(2,-1,3) et de rayon $\sqrt{14}$.

2) (E) : $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+14=0\Leftrightarrow$

$(x^2-4x)+(y^2+2y)+(z^2-6z)=-14\Leftrightarrow$

$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2= 0$

(E) = {I(2,-1,3)}

3) (F) : $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+16=0 \Leftrightarrow$
$(x^2-4x)+(y^2+2y)+(z^2-6z)=-16 \Leftrightarrow$
$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=-2$
$(F)=\emptyset$

Ex 18 :

(S) : $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

O,A,B et C appartiennent à (S)$\Rightarrow$

$$\begin{cases} d=0 \\ 1+1+1+a+b+c+d=0 \\ 4+2a+d=0 \\ 1+4+4+a-2b+2c+d=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d=0 \\ a+b+c+d=-3 \\ 2a+d=-4 \\ a-2b+2c+d=-9 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow d=0$; $a=-2$; $b=5/4$ et $c=-9/4$

(S) : $x^2+y^2+z^2-2x+5/4.y-9/4.z=0$

Ex 19 :

1) A(1,7,-1) P : $x+y+z=0$
(S) est de rayon $R=d(A,P)=\frac{|7|}{\sqrt{3}}=\frac{7}{\sqrt{3}}$
$\Rightarrow$(S) : $(x-1)^2+(y-7)^2+(z+1)^2=\frac{49}{3}$

2) A(0,2,3) P : $x+y+z=0$
$R=d(A,P)=\frac{|-2+3+5|}{\sqrt{3}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$
$\Rightarrow$(S) : $x^2+(y-2)^2+(z-3)^2=12$

2) A(5,3,1) P : $3x-2y-z+7=0$
$R=d(A,P)=\frac{|15-6-1+7|}{\sqrt{14}}=\frac{15}{\sqrt{14}}$
$\Rightarrow$(S) : $(x-5)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=\frac{225}{14}$

Ex 20 :

$\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P

$\Rightarrow$P : $y-3z+d=0$

$A(1,4,-5)\epsilon P \Rightarrow 4-3\times(-5)+d=0 \Rightarrow d=-19$

Cclusion P : $y-3z-19=0$

Ex 21 :

1) $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$ vecteur normal à(OAB)

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ vecteur normal à(ABC)

$(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}).(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})=0+0+0=0 \Rightarrow$

(OAB)$\perp$ (ABC)

2) Désignons par P,Q et R les plans médiateurs respectifs de [OA],[OB] et [OC]

$*\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P$\Rightarrow$

P : $2x+d=0$

$I=O*A(1,0,0)\epsilon P \Rightarrow 2+d=0 \Rightarrow d=-2$

P: $2x-2=0 \Leftrightarrow$ P: $x=1$

$*\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Q$\Rightarrow$

Q : $x+y+d=0$

$J=O*B(1/2,1/2,0)\epsilon Q \Rightarrow 1+d=0 \Rightarrow d=-1$

Q: $x+y-1=0$

$*M(x,y,z)\epsilon R \Leftrightarrow OM=OC$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2$

$\Leftrightarrow 2x+2y+2z-3=0$

R : $2x+2y+2z-3=0$

3) Soit I(x,y,z) son centre $\Rightarrow I \in P \cap Q \cap R$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x + y - 1 = 0 \\ 2x + 2y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$x=1 ;y=0 et z=1/2

Donc I(1 ;0 ; ½)

Le rayon est r = IO=$\frac{\sqrt{5}}{2}$

EX 22 :

1) (S) $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=16$

(S) de centre I(1,1,1) et de rayon R=4

d(I,P)= $\frac{|1+1+1-1|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ <R $\Rightarrow$ (S)$\cap$P est le cercle de rayon r = $\sqrt{16 - \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{44}{3}}$

et de centre le point w(x,y ,z) le projeté orthogonal de I sur P $\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{Iw} = k.\overrightarrow{N_P} \\ w \in P \end{cases}$

avec $\overrightarrow{N_P}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ vecteur normal à P

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 1 + k \\ z = 1 + k \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow k = -2/3$$

$\Rightarrow$W(1/3 ,1/3 ,1/3)

(S)$\cap$P est le cercle de rayon r = $\sqrt{\frac{44}{3}}$ et de centre le point W(1/3,1/3,1/3)

2)

(S) $(x-3/2)^2+(y+5/2)^2+(z-1/2)^2=35/4$

(S) de centre I(3/2,-5/2,1/2) et de rayon R=$\frac{\sqrt{35}}{2}$

d(I,P)= $\frac{\left|\frac{3}{2}-5+\frac{3}{2}+5\right|}{\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$ <R $\Rightarrow$ (S)$\cap$P est le cercle de rayon r = $\sqrt{\frac{35}{4} - \frac{9}{14}} = \sqrt{\frac{227}{28}}$

et de centre le point w(x,y ,z) le projeté orthogonal de I sur P $\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{Iw} = k.\overrightarrow{N_P} \\ w \in P \end{cases}$

avec $\overrightarrow{N_P}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ vecteur normal à P

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3/2 + k \\ y = -5/2 + 2k \\ z = 1/2 + 3k \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow k = -3/14$$

$\Rightarrow$W(9/14 ,-41/14 ,-1/7)

(S)$\cap$P est le cercle de rayon r = $\sqrt{\frac{227}{28}}$ et de centre le point W(9/14 ,-41/14 ,-1/7)

EX23 :

3)(S) $(x-1)^2+(y+3/2)^2+(z-1/2)^2=4$

(S) de centre I(1,3/2,1/2) et de rayon R=2

d(I,P)= $\frac{|1+3+1-1|}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}$ <R $\Rightarrow$ (S)$\cap$P est le cercle de rayon r = $\sqrt{\frac{20}{9}} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$ et de centre le point w(x,y ,z) le projeté orthogonal de I sur P $\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{Iw} = k.\overrightarrow{N_P} \\ w \in P \end{cases}$

avec $\overrightarrow{N_P}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ vecteur normal à P

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 3/2 + 2k \\ z = 1/2 + 2k \\ x + 2y + 2z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow k = -4/9$$

$\Rightarrow$W(5/9 ,11/18 ,-7/18)

(S)∩P est le cercle de rayon r = $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ et de centre le point W(5/9 ,11/18 ,-7/18)

4)P : $\begin{cases} x = 1 + 2\alpha - \beta & (1) \\ y = -1 + \beta & (2) \\ z = 1 - \alpha & (3) \end{cases}$

(2) et (3)⇒α=1-z et β=1+y

Remplaçons dans (1) on aura :

x= 1+2(1-z)-(1+y) ⇒ P a pour équation cartésienne :x+y+2z-2=0

(S) $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=5$

(S) de centre I(-1,2,2) et de rayon R=$\sqrt{5}$

d(I,P)= $\frac{|-1+4+2-2|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ <R ⇒ (S)∩P est le cercle de rayon r = $\frac{\sqrt{14}}{2}$ et de centre le point w(x,y ,z) le projeté orthogonal de I sur P ⇒ $\begin{cases} \overrightarrow{Iw} = k.\overrightarrow{N_P} \\ w \in P \end{cases}$

avec $\overrightarrow{N_P}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ vecteur normal à P

⇒ $\begin{cases} x = -1 + k \\ y = 2 + k \\ z = 2 + 2k \\ x + y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$ ⇒k= -1/2

⇒W(-3/2 ,1 ,3/2)

(S)∩P est le cercle de rayon r = $\frac{\sqrt{14}}{2}$ et de centre le point W(-3/2 ,1 ,3/2)

EX 24 :

1) (S) est de centre A et Aϵ (ABC)⇒ (S)∩(ABC) est le cercle de centre A , de même rayon 1 et situé dans le plan (ABC).

2) Soit Q le plan passant par A et perpendiculaire à(AC).
(S)∩Q est le cercle de centre A,de rayon 1 et situé dans le plan Q.

3) Soit P le plan passant par C et perpendiculaire à(AC).
AC=$\sqrt{2}$ >R=1⇒ (S)∩Q=∅

EX 25 : A(1,-1,2) ; B(-1,1,-2)

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-4\end{pmatrix}$;

(AB) : $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - 4t \end{cases}$, $t \in IR$

2) **a/**

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-4\end{pmatrix}$:vecteur normal à P⇒

P :-2x+2y-4z+d=0

A(1,-1,2) ϵP⇒-2-2-8+d=0⇒d=12

P : -2x+2y-4z+12=0

P : x-y+2z-6=0

b/ Q : x-y+2z **+6=0**

B(-1,1,-2)

-1-1+2×(-2)+6=-6+6=0⇒BϵQ

$\vec{N}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ est normal à chacun des plans P et Q ⇒ P//Q

3) I(a,b,c)

a/ A:le projeté orthogonal de I sur P

$\Rightarrow$ (AI) $\perp$ P or on a (AB)$\perp$P

$\Rightarrow$ (AI) //(AB) et par suite Iϵ(AB)

b/ $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}a-1\\b+1\\c-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-4\end{pmatrix}$ sont colinéaires $\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix}-2 & a-1\\2 & b+1\end{vmatrix}=0et\begin{vmatrix}2 & b+1\\-4 & c-2\end{vmatrix}=0$$

$\Rightarrow$-2(b+1)-2(a-1)=0 et 2(c-2)+4(b+1)=0

$\Rightarrow$ b+a=0 et c+2b=0

$\Rightarrow$b= - a et c = 2a

c/ (S) est de centre I et de rayon R=IB

(S)$\cap$P est le cercle de centre A et de rayon $2\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ IB²=IA²+(2$\sqrt{3}$)²$\Rightarrow$ IB²-IA²=12

IB²-IA²=12

IB²=(a+1)²+(b-1)²+(c+2)² $\Rightarrow$a-b+2c=3

IA²=(a-1)²+(b+1)²+(c-2)²

d/ on a $\begin{cases}b=-a\\c=2a\\a-b+2c=3\end{cases}$

$\Rightarrow$ a=1/2 ; b = - ½ et c = 1

I(1/2 ; - ½ ; 1)

(S) est une sphère de centre I(1/2; -½ ;1)

Et de rayon R=IB=$\frac{3\sqrt{6}}{2}$

$\Rightarrow$ (S) : (x-1/2)²+(y+1/2)²+(z-1)²=27/2

EX 26 :

A(6,0,0) ;B(0,6,0) ;C(0,0,6) D(-2,-2,-2)

1) a/ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\6\\0\end{pmatrix};\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\0\\6\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}36\\36\\36\end{pmatrix}\neq\vec{O}\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite A,B et C ne sont pas alignées.

b/ $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}36\\36\\36\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P$\Rightarrow$ $\vec{N}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal àP

$\Rightarrow$P :x+y+z+d=0

AϵP$\Rightarrow$6+d=0$\Rightarrow$d=-6

$\Rightarrow$P :x+y+z-6=0

c/ $\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}\Rightarrow\overrightarrow{OD}=-2\,.\,\vec{N}\Rightarrow\overrightarrow{OD}$ et $\vec{N}$ sont colinéaires et par suite (OD) et P sont perpendiculaires.

d/ (OD) :$\begin{cases}x=-2t\\y=-2t\\z=-2t\end{cases}$;t ϵ IR

e/ H(x,y,z)ϵ(OD)$\cap$P $\Rightarrow$

$$\begin{cases}x=-2t\\y=-2t\\z=-2t\\x+y+z-6=0\end{cases}$$

$\Rightarrow$ -6t-6=0$\Rightarrow$ t=-1 $\Rightarrow$H(2 ;2 ;2)

* AH=BH=CH= $2\sqrt{6}$

f/ (OD) est perpendiculaire à P et (OD) passe par H : centre du cercle ζ circonscrit au triangle ABC ; alors (OD) est l'axe de ζ.

2) a/ $M(x,y,z)\in Q \Leftrightarrow CM= DM$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+(z-6)^2 =(x+2)^2+(y+2)^2+(z+2)^2$

$\Leftrightarrow 4x+4y+16z-24=0$

$\Leftrightarrow x+y+4z-6=0$

Q : x+y+4z-6=0

b/ $M(x,y,z)\in(OD)\cap Q \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x=-2t \\ y=-2t \\ z=-2t \\ x+y+4z-6=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (-2t)+(-2t)+4(-2t)-6=0\Rightarrow -12t-6=0$

$\Rightarrow t= -1/2\Rightarrow x=y=z=1$

$(OD)\cap Q=\{I(1,1,1)\}$

3/a/ (S) $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2= 27$

b/ $IA=IB=IC=ID= 3.\sqrt{3} \Rightarrow$ A,B,C et D appartiennent à (S)

c/ A,B et C appartiennent à $(S)\cap P\Rightarrow(S)\cap P$ est le cercle ζ circonscrit au triangle ABC.

Ex 27 :

1) S : $x^2+y^2+z^2+2x-2y-2=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-1)^2+z^2=4$

$\Rightarrow$ S de centre I(-1,1,0) et de rayon R=2

2) P_m :x+z+m=0

a/ P_0 : x+z=0

$d(I,P_0)=\frac{|-1+0|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}<R \Rightarrow (S)\cap P_0$ est le cercle ζde rayon $r=\sqrt{4-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{7}{2}}$ et de centre le point w(x,y ,z) le projeté orthogonal de I sur $P_0 \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{Iw}=k.\overrightarrow{N_0} \\ w\in P \end{cases}$

avec $\overrightarrow{N_0}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ vecteur normal à P_0

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-1+k \\ y=1 \\ z=k \\ x+z=0 \end{cases} \Rightarrow k= ½$$

$\Rightarrow$w(-1/2;1;1/2)

b/ $\overrightarrow{N_0}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ vecteur normal à P_0

$$(\vec{\imath}-\vec{k})\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \quad \vec{\jmath}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{N_0}.(\vec{\imath}-\vec{k})=1+0-1=0\Rightarrow \vec{\imath}-\vec{k}$ est un vecteur de P_0. (1)

$\overrightarrow{N_0}.\vec{\jmath}=0+0+0=0 \Rightarrow \vec{\jmath}$est un vecteur de P_0. (2)

$(\vec{\imath}-\vec{k}).\vec{\jmath}=0+0+0=0\Rightarrow (\vec{\imath}-\vec{k})\perp\vec{\jmath}$ (3)

$\|\vec{\jmath}\|=1 \quad \left\|\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath}-\vec{k})\right\|=1$ (4)

(1),(2),(3) et (4) $\Rightarrow (O;\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath}-\vec{k});\vec{\jmath})$ est un repère orthonormé de P_0

c/ on a :

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \\ \text{et} \quad \overrightarrow{OM} = \frac{X}{\sqrt{2}}(\vec{\imath} - \vec{k}) + Y\vec{\jmath}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{X}{\sqrt{2}} = x \\ Y = y \\ -\frac{X}{\sqrt{2}} = z \end{cases}$$

$\Rightarrow$ X=$\sqrt{2}x = -\sqrt{2}z$ et Y=y

w(-1/2;1;1/2) le centre de ζ

$\Rightarrow$w$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ dans $(O; \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath} - \vec{k}); \vec{\jmath})$

ζ est de rayon $\sqrt{\frac{7}{2}}$ donc

$\zeta : (X+\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (Y-1)^2 = \frac{7}{2}$ dans le repère $(O; \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath} - \vec{k}); \vec{\jmath})$

3) d(I,P_m)=$\frac{|-1+0+m|}{\sqrt{2}} = \frac{|m-1|}{\sqrt{2}}$ et R=2

d(I,P_m) < R $\Leftrightarrow \frac{|m-1|}{\sqrt{2}} < 2$

$\Leftrightarrow |m-1| < 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow -2\sqrt{2} < m-1 < 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 1-2\sqrt{2} < m < 1+2\sqrt{2}$

- Pour mϵ] $1-2\sqrt{2}$;$1+2\sqrt{2}$[S et P_m sont sécants
- Pour mϵ{$1-2\sqrt{2}$;$1+2\sqrt{2}$} S et P_m sont tangents
- Pour mϵ] $-\infty$;$1-2\sqrt{2}$ [**U**]$1+2\sqrt{2}$; $+\infty$[S et P_m sont disjoints

EX 28 : A(0,4,-1) ;B(-2,4,-5) ;C(1,1,-5)

Et D(1,0,-4)

1) Désignons par P,Q et R les plans médiateurs respectifs de [AB],[BC]et [AD]

- $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P

  $\Rightarrow$ P : 2x+4z+d=0

  A*B=I(-1,4,-3)ϵ P$\Rightarrow$-2-12+d=0

  $\Rightarrow$ d= 14 $\Rightarrow$ P: 2x+4z+14=0

  $\Rightarrow$ **P: x+2z+7=0**

- M(x,y,z) ϵQ$\Leftrightarrow$ BM=CM

$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y-4)^2+(z+5)^2=(x-1)^2+(y-1)^2+(z+5)^2$

$\Leftrightarrow$ 6x -6y +18 =0 $\Leftrightarrow$ x – y + 3= 0

$\Rightarrow$ **Q: x-y +3=0**

- $\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix}-1\\4\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à R

  D*A=J(0,5 ;2 ;-2,5) ϵR

  M(x,y,z)ϵ R$\Leftrightarrow \overrightarrow{JM}.\overrightarrow{DA} = 0$

  $\Leftrightarrow$-1 (x-0,5)+4(y-2)+3(z+2,5)=0

  $\Leftrightarrow$ -x+ 4.y+3z= 0

  R : -x+ 4.y+3z= 0

2) M(x,y,z)ϵP$\cap$Q$\cap$R $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x + 2z + 7 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \\ x - 4y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} z=-\frac{1}{2}(x+7) \\ y=x+3 \\ x-4(x+3)+\frac{3}{2}(x+7)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} z=-\frac{1}{2}(x+7) \\ y=x+3 \\ -3x-3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=-3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ **P∩Q∩R={I(-1,2,-3)}**

S est de rayon IA= 3

$\Rightarrow$ **S : $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$**

EX 29 :

A(0,6,0) ; B(0,0,8) ; C(4,0,8)

1) a) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}0\\6\\-8\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$=0+0+0=0 d'où (BC) ⊥ (BA)

b) $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}4\\0\\8\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}$=0+0+0=0

d'où (OA) ⊥ (OC)

c) $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{OB}$=0 d'où (BC) ⊥ (OB)

$\left.\begin{matrix}(BC)\perp(BA)\\(BC)\perp(OB)\end{matrix}\right\}\Rightarrow$ (OB) est perpendiculaire au plan (OAB)

2) $\vec{V}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right).\overrightarrow{OC}\right|$

$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}48\\0\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}4\\0\\8\end{pmatrix}$

$V=\frac{1}{6}|192|=32$

3) O,A,B et C ne sont pas coplanaires

d'où O,A,B et C appartiennent à une meme sphère (S)

(S): $x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+d=0$

$0\in(S)\Rightarrow d=0$

(S): $x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z=0$

$A\in(S)\Rightarrow 36+6\beta=0\ \Rightarrow \beta=-6$

(S): $x^2+y^2+z^2+\alpha x-6y+\gamma z=0$

$B\in(S)\Rightarrow 64+8\gamma=0\ \Rightarrow \gamma=-8$

(S): $x^2+y^2+z^2+\alpha x-6y-8z=0$

$C\in(S)\Rightarrow 16+64+4\alpha-64=0\Rightarrow \alpha=-4$

d'où (S): $x^2+y^2+z^2-4x-6y-8z=0$

$(S) : (x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=29$

d'où (S) est de centre I(2,3,4) de rayon $\sqrt{29}$

(Rq: on pourra considérer comme dans l'ex:18)

4) M(0,0,α)

a) le plan P contenant M et perpendiculaire à (OB) a pour équation : $\boxed{z=\alpha}$

la droite (OC) passe par O et de vecteur directeur

$$(OC) : \begin{cases} x=4k \\ y=0 \\ z=8k \end{cases} ,k \in \mathbb{R}$$

$$P \cap (OC) : \begin{cases} x=4k \\ y=0 \\ z=8k \\ z=\alpha \end{cases}$$

$k=\frac{\alpha}{8}$

d'où $N(\frac{\alpha}{2},0,\alpha)$

de meme : $P(\frac{\alpha}{2},6-\frac{3\alpha}{4},\alpha)$ et $Q(0,6-\frac{3\alpha}{4},\alpha)$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$ d'où MNPQ est un parallélogramme

$$\overrightarrow{MQ}\begin{pmatrix} 0 \\ 6-\frac{3\alpha}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MQ}=0$ d'où $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{MQ}$

<u>conclusion:</u> MNPQ est un rectangle

b) * (OB) perpendiculaire au plan (MNPQ)

d'où (OB) $\perp$ (MP)

$$* \overrightarrow{MP}\begin{pmatrix} \alpha/2 \\ 6-\frac{3\alpha}{4} \\ 0 \end{pmatrix} ; \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(MP) $\perp$ (AC) $\Leftrightarrow \overrightarrow{MP} \perp \overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow 4(\frac{\alpha}{2})-6(6-\frac{3\alpha}{4})=0 \Leftrightarrow 2\alpha-36+\frac{9}{2}\alpha=0$

$\Leftrightarrow \alpha=\frac{72}{13}$

c) $MP^2=\frac{\alpha^2}{4}+(6-\frac{3\alpha}{4})^2$

on pose : $f(x)=\frac{x^2}{4}+(6-\frac{3x}{4})^2$

$f'(x)=\frac{x}{2}-\frac{3}{2}(6-\frac{3x}{4})=\frac{13x}{8}-\frac{18}{2}$

x	0	72/13	8
f'(x)	-	0	+
f(x)	↘	f(72/13)	↗

MP est minimale pour $\alpha=\frac{72}{13}$

EX 30 :

$J(0,1,0)$

$\overrightarrow{OM} = \alpha.\vec{k}$

$\overrightarrow{AN} = \beta.\vec{i}$

1) $S : x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$

2) M$(0,0,\alpha)$ et N$(\beta,2,0)$

$$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}\beta\\2\\-\alpha\end{pmatrix}$$

$$(MN) : \begin{cases} x=k\beta \\ y=2k \\ z=\alpha-k\alpha \end{cases} \qquad k \in \mathbb{R}$$

3) a) (MN) tangente à (S) ssi la distance de J à la droite (MN) est égale R=1

$$\Leftrightarrow \frac{\left\|\overrightarrow{JM} \wedge \overrightarrow{MN}\right\|}{\left\|\overrightarrow{MN}\right\|}=1$$

$$\overrightarrow{JM}\begin{pmatrix}0\\-1\\\alpha\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}\beta\\2\\-\alpha\end{pmatrix}$$

$$\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+4}$$

$$\overrightarrow{JM} \wedge \overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-\alpha\\\alpha\beta\\\beta\end{pmatrix}$$

$$\left\|\overrightarrow{JM} \wedge \overrightarrow{MN}\right\| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\alpha^2\beta^2}$$

(MN) tangente à (S) $\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{JM} \wedge \overrightarrow{MN}\right\| = \left\|\overrightarrow{MN}\right\|$

$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+4 = \alpha^2+\beta^2+\alpha^2\beta^2$

$\Leftrightarrow \alpha^2\beta^2 = 4$

b) $\{Q\} = (MN) \cap S$

$$Q(x,y,z) \text{ tq : } \begin{cases} x=k\beta \\ y=2k \\ z=\alpha-k\alpha \\ x^2+(y-1)^2+z^2=1 \end{cases} \quad \text{d'où}$$

$k^2\beta^2 + (2k-1)^2 + \alpha^2(1-k)^2 = 1$

$\Leftrightarrow k^2\beta^2 + 4k^2 - 4k + 1 + \alpha^2(1-2k+k)^2 = 1$

$\Leftrightarrow k^2\beta^2 + 4k^2 - 4k + \alpha^2 - 2\alpha^2 k + \alpha^2.k^2 = 0$

$\Leftrightarrow (\alpha^2+\beta^2+4).k^2 - (4+2\alpha^2)k + \alpha^2 = 0$

$\Delta' = (2+\alpha^2)^2 - \alpha^2(\alpha^2+\beta^2=4)$

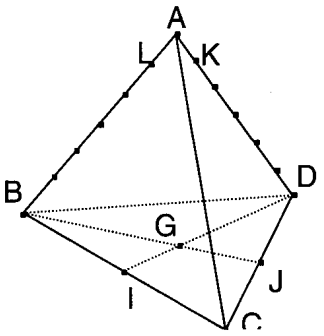
$\Delta' = 4 + 4\alpha^2 - \alpha^2\beta^2 - 4\alpha^2 = 4 - (\alpha^2\beta^2)$

$\Delta' = 4 - 4 = 0$

d'où : $k = \dfrac{2+\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2+4}$

$$Q\left(\frac{(2+\alpha^2)\beta}{\alpha^2+\beta^2+4}, \frac{2(2+\alpha^2)}{\alpha^2+\beta^2+4}, \frac{2+\alpha\beta^2}{\alpha^2+\beta^2+4}\right)$$

EX31 :



$5\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KD}=\vec{0}$

$\overrightarrow{AL}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$

$(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$: repère de (ξ)

1) A(0,0,0) ; B(1,0,0) ; c(0,1,0) ; D(0,0,1)

$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

$\Rightarrow(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AD})=\vec{0}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

d'où $G(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

I=B*C $\Rightarrow$ $I(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$

J=C*D $\Rightarrow$ $J(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

* $5\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KD}=\vec{0}\Rightarrow 5\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$

$\Rightarrow 6\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{AK}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$

d'où $K(0,0,\frac{1}{6})$

* $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\Rightarrow L(\frac{1}{6},0,0)$

2)* $K(0,0,\frac{1}{6})$; $\overrightarrow{KI}\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\-1/6\end{pmatrix}$

d'où (IK): $\begin{cases}x=\frac{1}{2}\alpha\\y=\frac{1}{2}\alpha\\z=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\alpha\end{cases}$ $\alpha\in\mathbb{R}$

*

$L(\frac{1}{6},0,0)$; $\overrightarrow{LJ}\begin{pmatrix}-1/6\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$; $d'ou(LJ):\begin{cases}x=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\beta\\y=\frac{1}{2}\beta\\z=\frac{1}{2}\beta\end{cases}$ $\beta\in IR$

*** (AG) :** $\begin{cases}x=\frac{1}{3}\gamma\\y=\frac{1}{3}\gamma\\z=\frac{1}{3}\gamma\end{cases}$ $(\gamma\in IR)$

3) M(x,y,z)∈(LJ)∩(AG)⇔ $\begin{cases}x=\frac{1}{3}\gamma\\y=\frac{1}{3}\gamma\\z=\frac{1}{3}\gamma\\\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\beta=\frac{1}{3}\gamma\\\frac{1}{2}\beta=\frac{1}{3}\gamma\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3}\gamma \\ y=\frac{1}{3}\gamma \\ z=\frac{1}{3}\gamma \\ \gamma=\frac{3}{8} \\ \beta=\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{8} \\ y=\frac{1}{8} \\ z=\frac{1}{8} \end{cases}$$

Conclusion : (LJ)∩(AG)={Q($\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8}$)}

Pour vérifier que le point Q∈(IK) ; il suffit de signaler qu'en remplaçant α par ¼ dans l'équation de (IK) on obtient x=y=z=1/8

Alors on peut conclure que les droites (IK),(JL) et (AG) sont concourantes en Q($\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8}$).

EX 32 : B(1,1,0)

P : x+y-a=0 ; $a \in]0,1[$

1)A(1,0,0) ;C(0,1,0) S(0,0,1)

$\overrightarrow{SA}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ D'où

$$(SA): \begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = 0 \\ z = -\alpha \end{cases} ; (\alpha \in IR)$$

$\overrightarrow{SB}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ D'où

$$(SB): \begin{cases} x = \beta \\ y = \beta \\ z = 1-\beta \end{cases} ; (\beta \in IR)$$

$\overrightarrow{SC}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ D' où

$$(SC): \begin{cases} x = 0 \\ y = 1+\delta \\ z = -\delta \end{cases}, \delta \in IR$$

$$(OC): \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}, (t \in IR)$$

$$(OA): \begin{cases} x = k \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, (k \in IR)$$

2) $*\{I\} = P \cap (SA)$

I(x ,y ,z) tel que :

$$\begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = 0 \\ z = -\alpha \\ x+y = a \end{cases}$$

$(1+\alpha)+0 = a \Rightarrow \alpha = a-1$

D'où I(a,0,1-a)

$*\{J\} = (SB) \cap P$

J(x ,y ,z) tq :

$$\begin{cases} x = \beta \\ y = \beta \\ z = 1 - \beta \\ x + y = a \end{cases}$$

$\beta + \beta = a \Rightarrow \beta = \frac{a}{2}$

D'où $J\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 1 - \frac{a}{2}\right)$

De même :

K(0, a , 1-a) ; L(0,a,0) ; M(a,0,0)

b) $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix} -a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \overrightarrow{ML}\begin{pmatrix} -a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a-1 \end{pmatrix}$

on a :

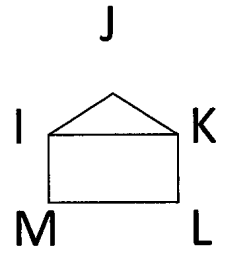
$\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{ML}$ d'où $IKLM$ est un parallélogramme

$\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{IM} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{IK} \perp \overrightarrow{IM}$

D'où IKLM est un rectangle

c)A=aire(IKLM)+aire(IJK)

= A1+A2



A1=IKxIM carIKLMestun rectangle.

$A_1 = \sqrt{2a^2}.\sqrt{(a-1)^2} = a.\sqrt{2}.|a-1|$

$A_1 = \sqrt{2}.a(1-a)$

$A_2 = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK}\right\|$

$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} \frac{-\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK}\begin{pmatrix} -\frac{a^2}{2} \\ \frac{a^2}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4}{4}+\frac{a^4}{4}}$$

$$A_2 = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$$

D'où $A = A_1 + A_2 = \frac{a\sqrt{2}}{4}.(4-3a)$

3) $f(x) = \frac{x\sqrt{2}}{4}(4-3x)$

a) $f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(2-3x)$

X	0		$\frac{2}{3}$		1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	↘	$\frac{\sqrt{2}}{4}$

f admet $\frac{\sqrt{2}}{3}$ comme maxime absolu en $\frac{2}{3}$

$A = f(a)$D'où A est maximale Pour

$a = \frac{2}{3}$

*soit Gle centre de gravité de OAC

$\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = 0 \Rightarrow$

$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$ d'où $G(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0)$

Pour $a = \frac{2}{3}$

$P: x + y = \frac{2}{3}$

On a : $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow G \in P$